IA : TAMBA	Cellule : Mathématiques
Lycée : Koumpentoum	Classe : Terminale L
Année : 2022-2023	Chapitre : Ln et Expo

SERIE D'EXERCICES

EXERCICE 1 *Bac 2007*

PARTIE A

1. Etudier le signe de $\frac{x-1}{x}$ pour $x \in]0\,;+\infty[$.
2. Donner : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$; en déduire $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)$.
3. Calculer la dérivée du produit $x.\ln x$ pour $x \in]0\,;+\infty[$.
4. Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-x\ln x$.

PARTIE B

Soit la fonction g définie par $g(x)=x+1-\ln x$

1. Déterminer le domaine de définition D_g de g.

2. Déterminer les limites de g aux bornes de D_g.

3. Calculer $g'(x)$ et en déduire le tableau de variation de g (en utilisant la question A/1).

4. Calculer $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ et $g(4)$.

PARTIE C

Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_g), les droites d'équations $y=0$; $x=1$ et $x=4$.

EXERCICE 2 *Bac 2008*

Soit la fonction g définie par $g(x)=\frac{2x^2+x-5}{x^2+x-6}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_g$; $g(x)=a+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+3}$.
2. Soit la fonction G définie sur $[3;5]$ par
   $\mathrm{G(x)}=2\mathrm{x}+\ln(x-2)-2\ln(x+3)$.
   Montrer que G est une primitive de g sur $[3;5]$.
3. Calculer l'intégrale $I=\int_3^5 g(x)dx$.

EXERCICE 3 *Bac 2011*

PARTIE A

On considère la fonction f définie par $f(x)=\ln(ax+b)$ où a et b sont des nombres réels. (C_f) désigne la courbe représentative de f dans le plan P muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Déterminer les réels a et b pour que (C_f) passe par le point $I\binom{1}{0}$ et admette en ce point une tangente (T) parallèle à la droite D : $y=-x$.

PARTIE B

Dans la suite de l'exercice, on prend $a=-1$ et $b=2$.
Soit $f(x)=\ln(2-x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier les limites de f aux bornes de cet ensemble.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

3. a) Etudier le signe de f', en déduire le tableau de variations de f.
   b) Ecrire une équation de la tangente (T).

4. Calculer $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$; en déduire la nature de la branche infinie à (C_f) en $-\infty$.

4. Déterminer les coordonnées du point J intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées.
5. Tracer la tangente (T), l'asymptote et la courbe (C_f) dans le repère orthonormé.

EXERCICE 4 *Bac 2006*

1/ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - e^{-x} = 0$.

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère

orthonormé d'unité 2 cm.

a) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.

b) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$. En déduire que l'origine du repère est le centre de symétrie de (C_f).

II/ Dans la suite du problème, on étudiera la fonction f sur $]0;+\infty[$.

1) a) Calculer la limite de f en 0 à droite.
b) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$; en déduire la limite de f en $+\infty$.

c) Quelles sont les asymptotes à la courbe (C_f) ?

2) Montrer que $f'(x) = \frac{-4}{(e^x-e^x)^2}$; en déduire le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

3) Donner le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

4) Construire la courbe (C_f) et ses asymptotes sur $]0;+\infty[$. En utilisant la question I / 2b, construire (C_f) sur D_f.

III/ /

Soit A le domaine limité par (C_f) et les droites d'équations : $x = 1$, $x = 2$ et l'axe des abscisses. On pose $U(x) = e^x - e^{-x}$.

1) Montrer que $f(x) = \frac{U\prime(x)}{U(x)}$. En déduire une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

EXERCICE 5 *Bac 2010*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2e^x-1}{e^x-2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f. En déduire l'existence de trois asymptotes à la courbe (C_f) de f.

2) Calculer la dérivée $f'(x)$. Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec les axes du repère.

4) a) Trouver deux nombres réels a et b tels que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x-2}$.

EXERCICE 6 *Bac 2019*

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$. On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3) Calculer la dérivée f' puis déterminer son signe.
4) Dresser le tableau de variations de f.

5) On admet que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^{-x}+1} = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$.

Montrer alors que les droites (D1) : $y = x - 1$ et (D2) : $y = x + 1$ sont des asymptotes obliques à (C_f) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

Courage pour toujours